2. ZADAĆA

1. Odredite minimalni polinom algebarskog broja $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ i njegovu apsolutnu logaritamsku visinu.

2. Neka je α algebarski broj stupnja d i neka je $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(\alpha) = 0$. Dokažite da tada za konstantu $c(\alpha)$ u Liouvilleovom teoremu možemo uzeti

$$c(\alpha) = \frac{1}{a_d} \prod_{i=2}^{d} (1 + |\alpha| + |\alpha^{(j)}|)^{-1},$$

   gdje su $\alpha^{(1)} = \alpha, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(d)}$ nultočke od $P(x)$.

3. Dokažite tvrdnju Rothovog teorema za sve $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

4. Odredite konstantu c tako da za sve racionalne brojeve $\frac{x}{y}$, $y > 0$ vrijedi

$$\left| \sqrt[3]{19} - \frac{x}{y} \right| > \frac{c}{y^{2.56}}.$$

5. Odredite sve Lucasove brojeve koji u dekadskom zapisu imaju sve znamenke jednake. Lucasovi brojevi su dani rekurzijom $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ za $n \geq 0$.